

Θέμα 1. [1+2] Έστω  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq \alpha x\}$  με  $\alpha > 0$ , και  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(x, y) = \begin{cases} c + x + y, & (x, y) \in A, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A, \end{cases} \quad c > 0.$$

(α') Δείξτε ότι το  $A \subset \mathbb{R}^2$  είναι κλειστό και βρείτε το σύνορο,  $\partial A$ , και το εσωτερικό του,  $\overset{\circ}{A}$ .

(β') Εξετάστε σε κάθε  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  την  $f$  ως προς τη συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα, διαφορισιμότητα και συνεχή διαφορισιμότητά της, και βρείτε, όπου υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους, την κλίση, την παράγωγο και τις παραγώγους κατά κάθε κατεύθυνση.

Θέμα 2. [1] Έστω  $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  διαφορίσιμη. Δείξτε ότι η  $\bar{f}$  είναι συνεχής.

Θέμα 3. [1+0.5] Έστω  $U = [-1, 1] \times [-1, 1]$  και  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ .

(α') Βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

(β') Αποδείξτε ότι στα σημεία  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  και  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  η  $f$  δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 4. [1.5] Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x) - 2x + y}{x^3 + y}, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x^2y \cos z}{x^2 + y^2},$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\|(x, y)\|} \begin{pmatrix} e^{x(y+1)} - x - 1 \\ \sin(x - y) \end{pmatrix}.$$

Θέμα 5. [1] Έστω  $\nu, r > 0$  και έστω ένα σωματίδιο, το οποίο διατρέχει την καμπύλη

$$\bar{\gamma}(t) = (\nu t - r \sin(\nu t/r), r - r \cos(\nu t/r)) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 2\pi/\nu].$$

(α') Σε ποια σημεία  $(x_0, y_0) \in C = \bar{\gamma}([0, 2\pi/\nu])$  το διάνυσμα ταχύτητας του σωματιδίου είναι παράλληλο στον άξονα των  $x$  και ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου στα σημεία αυτά;

(β') Ποιο είναι το μήκος της καμπύλης που διέτρεξε το σωματίδιο;

Θέμα 6. [1] Έστω  $\bar{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  διαφορίσιμη και  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(\bar{x}) = \sin(\|\bar{f}(\bar{x})\|^2)$ . Επιχειρηματολογήστε γιατί η  $g$  είναι διαφορίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της.

Θέμα 7. [1] Έστω  $f: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x, y) = xy$  και έστω  $L$  το σύνολο στάθμης  $c > 0$  της  $f$ . Βρείτε το  $L$ , παραμετροποιήστε το μέσω μιας καμπύλης  $\bar{\gamma}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  και δείξτε ότι η κλίση της  $f$  είναι κάθετη στο εφαπτόμενο διάνυσμα της  $\bar{\gamma}$  σε κάθε σημείο της εικόνας της.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!